

# Curvas Cónicas e Superfícies Geradas pelas Curvas Cónicas: Os seus Traçados Geométricos e Aplicações no Design.

Joaquim Manuel de Castro Bonifácio da Costa



UNIVERSIDADE  
DE LISBOA



FACULDADE DE ARQUITETURA  
UNIVERSIDADE DE LISBOA

DOUTORAMENTO EM DESIGN

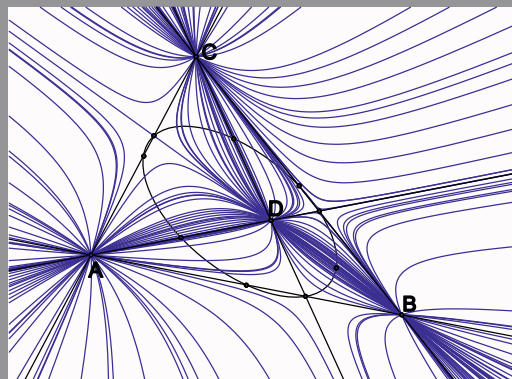
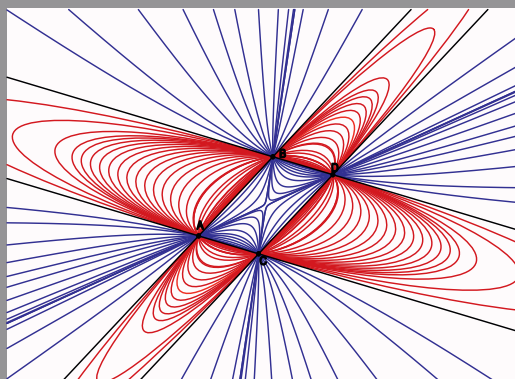
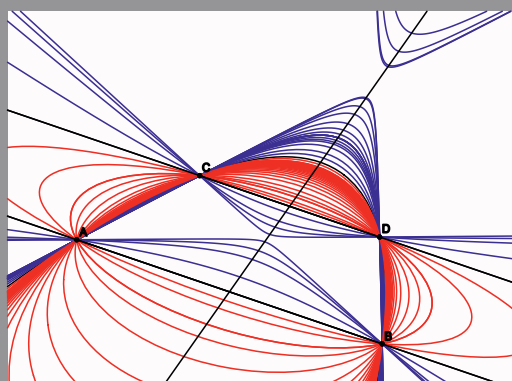
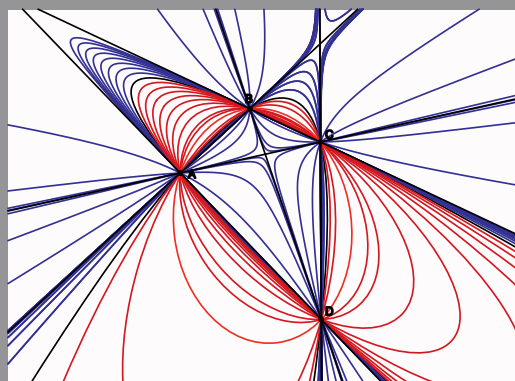
## Orientadores

**Doutor Fernando José Carneiro Moreira da Silva**

Professor Catedrático da Faculdade de Arquitetura da Universidade de Lisboa

**Doutor Vítor Manuel Bairrada Murtinho**

Professor Associado do Departamento de Arquitetura da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra



## Constituição do Júri

**Presidente: Doutor António José Morais,**

Professor Associado com Agregação, Faculdade de Arquitetura da Universidade de Lisboa.

**Vogais: Doutor Fernando José Carneiro Moreira da Silva,**

Professor Catedrático, Faculdade de Arquitetura da Universidade de Lisboa;

**Doutor Vítor Manuel Bairrada Murtinho,**

Professor Associado, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra;

**Doutor João Paulo Cabeleira Marques Coelho,**

Professor Auxiliar, Universidade do Minho;

**Doutor Luís António dos Santos Romão,**

Professor Auxiliar, Faculdade de Arquitetura da Universidade de Lisboa;

**Doutor Luís Miguel Cotrim Mateus,**

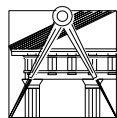
Professor Auxiliar, Faculdade de Arquitetura da Universidade de Lisboa;

**Doutora Fátima Regina Duarte Gouveia Fernandes Jorge,**

Professora Adjunta, Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Castelo Branco.

Tese especialmente elaborada para a obtenção do grau de doutor  
Documento definitivo

MAIO 2016



LISBOA

UNIVERSIDADE  
DE LISBOA

FACULDADE DE ARQUITETURA  
UNIVERSIDADE DE LISBOA

## **Curvas Cónicas e Superfícies Geradas pelas Curvas Cónicas: Os seus Traçados Geométricos e Aplicações no Design.**

Joaquim Manuel de Castro Bonifácio da Costa

### **Orientadores**

Doutor Fernando José Carneiro Moreira da Silva

Professor Catedrático, Faculdade de Arquitetura da Universidade de Lisboa

Doutor Vítor Manuel Bairrada Murtinho

Professor Associado, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

### **Constituição do Júri**

#### **Presidente:**

Doutor António José Morais,

Professor Associado com Agregação, Faculdade de Arquitetura da Universidade de Lisboa.

#### **Vogais:**

Doutor Fernando José Carneiro Moreira da Silva,

Professor Catedrático, Faculdade de Arquitetura da Universidade de Lisboa;

Doutor Vítor Manuel Bairrada Murtinho,

Professor Associado, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra;

Doutor João Paulo Cabeleira Marques Coelho,

Professor Auxiliar, Universidade do Minho;

Doutor Luís António dos Santos Romão,

Professor Auxiliar, Faculdade de Arquitetura da Universidade de Lisboa;

Doutor Luís Miguel Cotrim Mateus,

Professor Auxiliar, Faculdade de Arquitetura da Universidade de Lisboa;

Doutora Fátima Regina Duarte Gouveia Fernandes Jorge,

Professora Adjunta, Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Castelo Branco.

**Tese especialmente elaborada para obtenção do grau de doutor em design  
Documento definitivo**

**Lisboa, Maio de 2016**

**Curvas Cónicas e Superfícies Geradas pelas Curvas Cónicas:  
Os seus Traçados Geométricos e Aplicações no Design.**



À Isabel, pela cumplicidade de uma vida, e aos meus filhos Vasco e Pedro

## Agradecimentos

Aos meus orientadores Doutor Fernando José Carneiro Moreira da Silva e Doutor Vítor Manuel Bairrada Murtinho, com reverência às qualidades científicas e profissionais, quero agradecer o estímulo, a oportunidade das críticas e sugestões e o rigor exigido. Desde a metodologia até inúmeros aspetos relativos à forma e conteúdo, este trabalho procura refletir os contributos que tiveram. O respeito e reconhecimento levam-me a solicitar o favor de continuarem a ser meus amigos.

A frequência da parte curricular do Doutoramento, as palestras do Seminário de investigação e a avaliação realizada nos diversos pontos de situação, pela diversidade dos temas e qualidade das apresentações possibilitaram a extensão da minha mundividência, com contributos que espero estejam refletidos neste texto, pelo que a todos os intervenientes, docentes e oradores, é devido um justo agradecimento.

Aos meus colegas e amigos que tiveram a paciência e amizade para me ouvirem falar de algo por vezes exótico para eles, mas de cujos contributos e experiências pessoais recolhi sugestões, sobretudo na forma de expor o tema, um abraço agradecido.

Agradeço ainda aos meus alunos, principal razão desta tese, pela emoção e prazer que me têm proporcionado ao longo da minha vida docente, pelo crescimento pessoal de cada um, desde o início dos cursos até ao exercício profissional.

A todos os meus familiares agradeço o estímulo e apoio ao longo da vida. Aos meus filhos Vasco e Pedro, que todos os dias me alegram, pelas competências, conhecimentos e sucessos pessoais, mas sobretudo pela satisfação de os ver cidadãos honestos e trabalhadores, conscientes dos seus direitos e deveres, o que, para além das suas atitudes sempre exigentemente críticas no rigor, foi estímulo na realização desta tese.

À Isabel, companheira de uma vida, nos momentos difíceis e alegrias, pelo apoio e estímulo decisivo, tanto intelectual como anímico, agradeço este trabalho que também é teu.



**Curvas Cónicas e Superfícies Geradas pelas Curvas Cónicas:  
Os seus Traçados Geométricos e Aplicações no Design.**



## **RESUMO**

No âmbito do Design, e graficamente, sistematiza-se e aprofunda-se o conhecimento das curvas cónicas e, em especial, sobre as suas construções geométricas, contribuindo para o reconhecimento da importância do estudo destas curvas e das superfícies geradas a partir delas no ensino da geometria no Design. Utiliza-se um método expositivo de análise crítica do conhecimento existente, propondo-se ângulos de abordagem menos usuais. Procura-se, ainda, suprir o insuficiente conhecimento e divulgação científica das cónicas em Portugal, e em particular no Design, de três modos: pela sistematização do conhecimento existente, pela adaptação do conhecimento da geometria projetiva, com expressão na geometria plana e na geometria analítica, para a linguagem dos traçados geométricos em geometria plana e em geometria descritiva e, ainda, pela contribuição para a utilização mais generalizada, designadamente com os meios tecnológicos atuais.

Paralelamente, identificam-se potencialidades das curvas na capacidade de resolução de problemas de representação gráfica rigorosa, por designers e outros profissionais, designadamente os das áreas das artes visuais e da arquitetura, com reflexos no ensino e na prática profissional. Exemplificam-se utilizações dos traçados das curvas cónicas e das superfícies geradas com elas, no Design e em outras áreas, simplificando soluções e reafirmando a importância e atualidade da geometria plana e da geometria descritiva, tanto no processo de construção do conhecimento e no desenvolvimento do projeto, como nas aplicações práticas, enquanto suporte concetual e representação gráfica.

Tendo em vista a simplificação da aplicação das cónicas e das superfícies geradas com elas em projetos de Design, resolveram-se alguns problemas com solução complexa, ou sem solução, na literatura consultada. Para tal, utilizámos métodos menos usuais, designadamente alguns derivados da geometria descritiva e, sobretudo, procurando integrar os conhecimentos mais recentes sobre as cónicas.

Tal abordagem permitiu ainda o aprofundamento de conhecimento com potencial interesse teórico em diversas áreas e o enunciar de algumas propriedades das cónicas que não se encontraram descritas na literatura, numa relação dialética entre teoria e prática, num contexto que contribui para a reafirmação da geometria descritiva, na sua capacidade de desenvolvimento do pensamento criativo.

**Palavras-chave:** cónicas, curvas cónicas, superfícies, superfícies quádricas, design.



**Conical curves and surfaces generated by conical curves:  
Their geometric constructions and applications in Design.**

**ABSTRACT**

In context of Design, and graphically, this research aims to systematize and to deepen the knowledge about the conical curves, and especially on their geometrical constructions, contributing to the recognition of the importance of the study of these curves and of the surfaces generated from them, mainly in the teaching of geometry in Design courses. An expositive methodology of critical analysis of literature is used, proposing less usual approaches. It also aims to compensate insufficient knowledge and scientific dissemination of conical curves in Portugal, particularly in Design, in three ways: systematizing the existent knowledge, adapting knowledge of projective geometry in plane and analytical geometry for the language of geometrical constructions in plane geometry and descriptive geometry and, still, contributing to a more generalized use involving recent technology.

Parallel, the study identifies potentialities of the conical curves in solving problems of rigorous graphic representation for designers and other professionals, namely those from the areas of visual arts and of architecture, with reflexes in the teaching and in the professional practice. It gives examples of practical uses of graphic resolutions of conical curves and of their generated surfaces in Design and other areas, reassuring the importance and relevance of plane geometry and descriptive geometry, both in the construction of knowledge and in the development of the project and in practical applications, as a conceptual framework and graphic representation.

Within the scope of simplifying the use of conics and surfaces generated with them in Design projects, are presented solutions for some problems with complex solutions, or without solution, in reviewed literature.



The study approach contributes not only to deepen the theoretical frame in several areas but also enunciates some proprieties of conics not mentioned yet in literature, in a dialectical relationship between theory and practice, in a context that contributes to the reaffirmation of descriptive geometry and its capacity of development of creative thinking.


**Keywords:** conics, conical curves, surfaces, quadric surfaces, design.







## ÍNDICE GERAL


Dedicatória e agradecimentos	
<b>RESUMO</b>	i
<b>ABSTRACT</b>	iii
<b>ÍNDICE GERAL</b>	v
<b>ÍNDICE DE FIGURAS</b>	ix
<b>GLOSSÁRIO</b>	xxi
<b>NOTAÇÕES ADOTADAS E REPRESENTAÇÃO</b>	xxvii
	
<b>1. INTRODUÇÃO</b>	1
1.1. A ELABORAÇÃO DA TESE	12
1.1.1. QUESTÕES DE INVESTIGAÇÃO	12
1.1.2. SÍNTESE DE OBJETIVOS	13
1.2. A TESE	14
1.3. DESENVOLVIMENTO DA INVESTIGAÇÃO	15
1.4. RECURSOS	15
1.4.1. OUTROS RECURSOS - EDITORES E DISTRIBUIDORES	18
1.5. HARDWARE E SOFTWARE INFORMÁTICOS DE APOIO AO DESENVOLVIMENTO DA INVESTIGAÇÃO	19
1.6. VALIDAÇÃO DAS SOLUÇÕES DOS DIVERSOS PROBLEMAS INTERMÉDIOS	20
1.7. CONSIDERAÇÕES COMPLEMENTARES	21
1.8. CONCLUSÃO	22
1.9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS DO CAPÍTULO	22
	
<b>2. CONCEITOS E PROPRIEDADES DAS SECÇÕES CÓNICAS</b>	31
2.1. INTRODUÇÃO	31
2.2. PARA UMA DEFINIÇÃO DO CONCEITO DE CURVA	31
2.3. CONCEITO DE TANGENTE E DE ASSÍMPTOTA	36
2.4. PARA A DEFINIÇÃO DO CONCEITO DE CURVA CÓNICA	37
2.5. AS DIFERENTES SECÇÕES CÓNICAS	39
2.6. FOCOS E DIRETRIZES DAS CÓNICAS	46
2.6.1. ELIPSE	48

2.6.2. PARÁBOLA	50
2.6.3. HIPÉRBOLE	51
2.7. CONFORMIDADE DA DETERMINAÇÃO DOS FOCOS E DIRETRIZES ATRAVÉS DO TEOREMA DE DANDELIN E DE MÉTODOS DA GEOMETRIA PLANA	53
2.8. DO CONE AO DUPLO CONE E À SUPERFÍCIE CÔNICA	59
2.8.1. SUPERFÍCIES CÔNICAS OBLÍQUAS	59
2.8.2. OBTENÇÃO DE UMA SECÇÃO CIRCULAR EM QUALQUER SUPERFÍCIE CÔNICA	64
2.9. APOLÔNIO DE PERGA E O ESTUDO DOS CONES RETOS E OBLÍQUOS	69
2.10. IDENTIFICAÇÃO DO TIPO DE CURVA CÔNICA	79
2.11. CIRCUNFERÊNCIA DE MONGE	80
2.12. PROPORCIONALIDADE ENTRE CORDAS PARALELAS	82
2.13. A RELAÇÃO ELIPSE – HIPÉRBOLE	83
2.14. PROPRIEDADES REFLEXIVAS DAS CÔNICAS	85
2.15. CONCLUSÃO	87
2.17. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS DO CAPÍTULO	90
	
<b>3. DA GEOMETRIA DAS CÔNICAS AOS TRAÇADOS GRÁFICOS</b>	93
3.1. OS TRAÇADOS DE CÔNICAS DADOS OS EIXOS E OS FOCOS	93
3.2. ANÁLISE DA UTILIZAÇÃO MAIS GENERALIZADA DAS CURVAS CÔNICAS	95
3.2.1. DETERMINAÇÃO DO CENTRO E DOS EIXOS DAS CÔNICAS	97
3.3. GEOMETRIA PROJETIVA, CONCEITOS DE HOMOLOGIA E AFINIDADE	99
3.3.1. OPERAÇÕES HOMOLÓGICAS APLICADAS À CIRCUNFERÊNCIA	102
3.3.2. O TRAÇADO DE TANGENTES ÀS CÔNICAS DEFINIDAS GRAFICAMENTE UTILIZANDO MÉTODOS PROJETIVOS	103
3.4. AS CURVAS CÔNICAS CENTRAIS E A SUA DETERMINAÇÃO GRÁFICA	110
3.4.1. DETERMINAÇÃO DOS DIÂMETROS CONJUGADOS DAS CÔNICAS CENTRAIS, ELIPSE OU HIPÉRBOLE, DADA A DIREÇÃO $d$ DE UM DELES, CONHECIDA A CURVA GRAFICAMENTE	111
3.4.2. DETERMINAÇÃO DOS EIXOS MAIOR E MENOR DA ELIPSE DADOS DIÂMETROS CONJUGADOS	111
3.4.3. DETERMINAÇÃO DOS EIXOS E FOCOS DA HIPÉRBOLE DADOS OS DIÂMETROS CONJUGADOS	116
3.4.4. DETERMINAR OS DIÂMETROS CONJUGADOS, COM EXTREMO DE UM DELES NUM PONTO $P$ QUALQUER DA ELIPSE CONHECIDOS OS EIXOS $AB$ E $CD$	117
3.5. TRAÇADOS RELATIVOS A CADA UMA DAS CURVAS CÔNICAS	118
3.5.1. A ELIPSE	118
3.5.2. A PARÁBOLA	126
3.5.3. A HIPÉRBOLE	145



3.6. O TRAÇADO DAS CURVAS CÓNICAS A PARTIR DE CINCO CONDIÇÕES	159
3.6.1. TEOREMA DE PASCAL	161
3.6.2. TEOREMA DE BRIANCHON	165
3.6.3. APLICAÇÃO DOS TEOREMAS DE PASCAL E BRIANCHON AOS TRAÇADOS DAS CÓNICAS	168
3.6.4. O CENTRO E DIÂMETROS DE CÓNICAS DEFINIDAS POR CINCO CONDIÇÕES	177
3.6.5 INTERSECÇÃO DE UMA RETA COM UMA CÓNICA	180
3.6.6. POR CINCO CONDIÇÕES DETERMINAR OUTROS PONTOS OU TANGENTES	187
3.7. O MÉTODO DOS FEIXES PROJETIVOS	191
3.7.1. APLICAÇÕES PRÁTICAS DO MÉTODO DOS FEIXES PROJETIVOS	196
3.8. AS CÓNICAS PELA TEORIA DAS PROPORÇÕES	204
3.9. CONCLUSÕES DO CAPÍTULO	206
3.10. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS DO CAPÍTULO	212
	
<b>4. DAS CURVAS CÓNICAS ÀS SUPERFÍCIES E APLICAÇÕES NO DESIGN</b>	215
4.1. SUPERFÍCIES QUÁDRICAS	215
4.1.1. SUPERFÍCIE CÓNICA E CILÍNDRICA	217
4.1.2. ESFERA	219
4.1.3. ELIPSOIDE	220
4.1.4. PARABOLÓIDE	221
4.1.5. PARABOLÓIDE HIPERBÓLICO OU PARABOLÓIDE REGRADO	223
4.1.6. HIPERBOLÓIDE DE UMA FOLHA	225
4.1.7. HIPERBOLÓIDE DE DUAS FOLHAS	229
4.1.8. SUPERFÍCIES QUÁDRICAS E SUAS APLICAÇÕES	230
4.2. OUTRAS SUPERFÍCIES GERADAS POR CURVAS CÓNICAS	230
4.2.1. TORO, ELIPSÓIDE E GLOBÓIDE	230
4.2.2. CAPIALÇADO CILÍNDRICO	231
4.2.3. CILINDRÓIDE	231
4.2.4. CONÓIDES	232
4.2.5. CONVOLUTAS	233
4.2.6. CORNO DE VACA	234
4.2.7. CAPIALÇADOS	234
4.2.8. LUNETOS	235
4.2.9. CÚPULA BIZANTINA	235

4.3. UTILIZAÇÃO DE SUPERFÍCIES QUÁDRICAS NO DESIGN DE ESTRUTURAS ALIGEIRADAS	236
4.4. OUTROS TIPOS DE SUPERFÍCIES	238
4.4.1. SUPERFÍCIE CÍCLICA	238
4.4.2. SUPERFÍCIES DADAS PELA SUA ESTRUTURA E SUPERFÍCIES GRÁFICAS	238
4.4.3. MANIFOLDS	239
4.4.4. SUPERFÍCIES TZITZEICA	240
4.5. SUPERFÍCIES COMPLEXAS NO DESIGN E NA ARQUITETURA	241
4.6. INTERSECÇÃO DE SUPERFÍCIES	243
4.6.1. INTERSECÇÃO DE SUPERFÍCIES UTILIZANDO AS CÔNICAS COMO CURVAS AUXILIARES	245
4.7. PLANIFICAÇÃO DE SUPERFÍCIES	249
4.8. EXEMPLOS DE UTILIZAÇÃO DAS CURVAS CÔNICAS NO DESIGN DO PROJETO À REPRESENTAÇÃO TÉCNICA	250
4.8.1. DO DESENHO À GEOMETRIA E DESTA À GEOMETRIA PROJETIVA	250
4.8.2. REPRESENTAÇÃO DE CURVAS CÔNICAS EM AXONOMETRIA E PERSPETIVA CÔNICA	253
4.9. OUTRAS APLICAÇÕES DAS CURVAS CÔNICAS E SUPERFÍCIES QUÁDRICAS NO DESIGN	255
4.10. CONCLUSÕES DO CAPÍTULO	262
4.11. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS DO CAPÍTULO	263
	
<b>5. DA TEORIA ÀS APLICAÇÕES PRÁTICAS, DA PRÁTICA À TEORIA DAS CÔNICAS</b>	267
5.1. PROBLEMAS E TEMAS DE ESTUDO COMPLEMENTAR	267
5.1.1. DEFINIR AS CÔNICAS DADAS QUATRO TANGENTES E UM PONTO QUE NÃO PERTENCE ÀS TANGENTES	267
5.1.2. DETERMINAÇÃO DAS CÔNICAS DEFINIDAS PELAS TANGENTES $t_1$ , $t_2$ E $t_3$ E POR DOIS PONTOS $A$ e $B$ SENDO QUE OS PONTOS NÃO PERTENCEM A QUALQUER DAS RETAS	278
5.1.3. A PARÁBOLA COMO DISCRIMINANTE DE ELIPSES E HIPÉRBOLES	290
5.1.4. PARÁBOLA DEFINIDA POR QUATRO PONTOS $A$ , $B$ , $C$ E $D$	294
5.2. FEIXE DE CÔNICAS POR QUATRO CONDIÇÕES	303
5.3. FAMÍLIAS DE CÔNICAS	308
5.4. CURVAS PARALELAS ÀS CÔNICAS	311
5.5. CURVAS SIMILARES ÀS CÔNICAS	314
5.5.1. AS OVAIS	314
5.5.2. PARÁBOLA E CATENÁRIA	314
5.5.3. CURVAS PARABÓLICAS	316
5.6. ANAMORFOSES DAS CURVAS CÔNICAS	316
5.7. NURBS, BÉZIER E SPLINES	320

5.8. CONCLUSÕES DO CAPÍTULO	327
5.9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS DO CAPÍTULO	330
5.10. FONTE DAS IMAGENS	332
	
<b>6. CONCLUSÕES</b>	333
6.1. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS DO CAPÍTULO	347
6.2. FONTE DAS IMAGENS	348
<b>7. BIBLIOGRAFIA</b>	349

## ÍNDICE DE FIGURAS

Fig. 1.1. – Desenho da investigação	14
Fig. 2.1 – Ponto de tangência na curva <i>a</i> e Ponto de inflexão na curva <i>b</i>	33
Fig. 2.2 – Ponto múltiplo de primeira espécie	34
Fig. 2.3 – Ponto múltiplo de segunda espécie	34
Fig. 2.4 – Ponto de retrocesso de primeira espécie	35
Fig. 2.5 – Ponto de retrocesso de segunda espécie	35
Fig. 2.6 – Tangente a uma curva – Método das secantes e perpendiculares	36
Fig. 2.7 – Tangente a uma curva – Método dos triângulos equiláteros	36
Fig. 2.8 – Tangente a uma curva – Método dos pontos médios	37
Fig. 2.9 – Secção definida por duas geratrizes	39
Fig. 2.10 – Secção circular	39
Fig. 2.11 – Secção elíptica	40
Fig. 2.12 – Secção parabólica	40
Fig. 2.13 – Secção hiperbólica	40
Fig. 2.14 – Secção elipse	41
Fig. 2.15 – Secção parábola	41
Fig. 2.16 – Secção hipérbole	41
Fig. 2.17 – Circunferências diretora e principal na elipse	45
Fig. 2.18 – Circunferências diretora e principal na hipérbole	45
Fig. 2.19 – Propriedade da tangente a uma cónica	45
Fig. 2.20 – Elipse (Focos e diretrizes)	46

Fig. 2.21 – Parábola (Focos e diretrizes)	46
Fig. 2.22 – Hipérbole (Focos e diretrizes)	46
Fig. 2.23 – Elipse (corda no foco e tangentes)	47
Fig. 2.24 – Parábola (corda no foco e tangentes)	47
Fig. 2.25 – Hipérbole (corda no foco e tangentes)	47
Fig. 2.26 – Outra propriedade da relação foco – diretriz da parábola	48
Fig. 2.27 – Outra propriedade da relação foco – diretriz da hipérbole	48
Fig. 2.28 – Determinação dos focos e diretrizes da elipse conhecidos os eixos desta	49
Fig. 2.29 – Determinação do foco e da diretriz da parábola conhecidos um ponto A qualquer, o vértice V e a tangente $t$ no vértice	51
Fig. 2.30 – Determinação dos focos, diretrizes e assíptotas da hipérbole conhecidos o eixo transversal $AB$ e o seu conjugado, a reta $DE$ .	52
Fig. 2.31 – Hipérbole equilátera	53
Fig. 2.32 – Hipérboles conjugadas	53
Fig. 2.33 – Conjugação dos dois procedimentos na secção elíptica	54
Fig. 2.34 – Conjugação dos dois procedimentos na secção parabólica	55
Fig. 2.35 – Conjugação dos dois procedimentos na secção hiperbólica	56
Fig. 2.36 – Conjugação dos dois métodos na secção num cilindro reto	57
Fig. 2.37 – Diretriz elipse e Secção elipse	60
Fig. 2.38 – Diretriz elipse e Secção parábola	60
Fig. 2.39 – Diretriz elipse e Secção Hipérbole	60
Fig. 2.40 – Diretriz parábola e secção elipse	61
Fig. 2.41 – Diretriz parábola e secção parábola	61
Fig. 2.42 – Diretriz parábola e secção hipérbole	61
Fig. 2.43 – Diretriz hipérbole e secção elipse	62
Fig. 2.44 – Diretriz hipérbole e secção parábola	63
Fig. 2.45 – Diretriz hipérbole e secção hipérbole	63
Fig. 2.46 – Cone reto de eixo coincidente, em projeção no plano da elipse, com o eixo maior da elipse	65
Fig. 2.47 – Cone oblíquo de eixo coincidente em projeção com o eixo menor da elipse	65
Fig. 2.48 – Cone oblíquo e eixo coincidente em projeção com o eixo maior da elipse	65
Fig. 2.49 – Cone oblíquo e eixo coincidente em projeção com uma corda da elipse	65
Fig. 2.50 – Superfície cónica de diretriz circular e secção circular de direcção antiparalela	66
Fig. 2.51 – Aplicação de secção antiparalela	67
Fig. 2.52 – O método de Apolónio aplicável a cones retos e oblíquos	70
Fig. 2.53 – Dado um diâmetro $CD$ da elipse e uma corda $JK$ , de direcção conjugada, determinar o diâmetro conjugado $LN$	72

Fig. 2.54 – Triângulo axial com <i>sintoma</i> de elipse	73
Fig. 2.55 – Triângulo axial com <i>sintoma</i> de parábola	73
Fig. 2.56 – Triângulo axial com <i>sintoma</i> de hipérbole	73
Fig. 2.57 – Diâmetros conjugados na elipse	74
Fig. 2.58 – Duas <i>figuras</i>	75
Fig. 2.59 – Áreas iguais das figuras	75
Fig. 2.60 – Focos em Apolónio	76
Fig. 2.61 – Diâmetros conjugados na hipérbole	77
Fig. 2.62 – Corda e diâmetro conjugado na parábola	78
Fig. 2.63 – Tangentes nos extremos de uma corda de qualquer cónica	78
Fig. 2.64 – Discriminante projetivo das cónicas	79
Fig. 2.65 – Parábola	80
Fig. 2.66 – Elipse	80
Fig. 2.67 – Hipérbole	80
Fig. 2.68 – Elipse e circunferência de Monge	80
Fig. 2.69 – Hipérbole e circunferência de Monge	81
Fig. 2.70 – Parábola e curva ortóptica	81
Fig. 2.71 – Propriedade de proporcionalidade	83
Fig. 2.72 – Relação elipse – hipérbole por números imaginários	84
Fig. 2.73 – Elipse e hipérbole por diâmetros conjugados	85
Fig. 2.74 – Elipse	86
Fig. 2.75 – Parábola	86
Fig. 2.76 – Hipérbole	86
Fig. 3.1 – Construção da elipse sendo dados os eixos maior $AB$ e menor $CD$	93
Fig. 3.2 – Construção da parábola sendo dados o foco $F$ e a diretriz $d$	94
Fig. 3.3 – Construção da hipérbole sendo dados a distância focal $F_1F_2$ e o eixo transversal $AB$	94
Fig. 3.4 – Tangente e normal num ponto da elipse	95
Fig. 3.5 – Tangente num ponto da parábola	95
Fig. 3.6 – Tangente num ponto da hipérbole	95
Fig. 3.7 – Centro da elipse	98
Fig. 3.8 – Centro da hipérbole	98
Fig. 3.9 – Eixo e vértice da parábola	98
Fig. 3.10 – Eixos da elipse	99
Fig. 3.11 – Eixos da hipérbole	99



Fig. 3.12 – Homologia	100
Fig. 3.3 – Afinidade	100
Fig. 3.14 – Homotetia	100
Fig. 3.15 – Simetria polar	100
Fig. 3.16 – Simetria por afinidade ortogonal	100
Fig. 3.17 – Simetria por afinidade oblíqua	100
Fig. 3.18 – Determinação por homotetia da concorrência de retas fora do desenho	101
Fig. 3.19 – Circunferência e quadrado	102
Fig. 3.20 a) – Elipse	103
Fig. 3.20 b) – Parábola	103
Fig. 3.20 c) – Hipérbole	103
Fig. 3.20 d) – Método alternativo	104
Fig.3.21 a) – Elipse	104
Fig.3.21 b) – Parábola	104
Fig.3.21 c) – Hipérbole	105
Fig. 3.21 d) – Método alternativo	105
Fig. 3.22 a) – Tangente num ponto da cônica central	106
Fig. 3.22 b) – Tangente num ponto da parábola	106
Fig. 3.23 a) – Tangentes a cônica central com direção dada	106
Fig. 3.23 b) – Tangente a parábola com direção dada	106
Fig. 3.24 – Tangente a cônica por ponto exterior	107
Fig.3.25 a) – Elipse	108
Fig.3.25 b) – Parábola	108
Fig.3.25 c) – Hipérbole	108
Fig. 3.26 a) – Elipse	109
Fig. 3.26 b) – Hipérbole	109
Fig. 3.27 – Determinação da tangente num ponto P da cônica dadas as tangentes em pontos de um diâmetro	109
Fig. 3.28 – Determinar terceiro ponto de tangência	110
Fig. 3.29 – Determinação de dois diâmetros conjugados	111
Fig.3.30 – Eixos a partir de diâmetros conjugados por homologia	112
Fig. 3.31 – Método de Mannheim	113
Fig. 3.32 – Método de Chasles	113
Fig. 3.33 – Determinação dos eixos dados diâmetros conjugados	114
Fig. 3.34 – Eixos determinados por afinidade	115

Fig. 3.35 – Método de Ritz	116
Fig. 3.36 – Determinação de eixos e focos da hipérbole por diâmetros conjugados	117
Fig. 3.37 – Determinar diâmetros conjugados dados os eixos da elipse	118
Fig. 3.38 – Elipse por rotação	119
Fig. 3.39 – Ponto da elipse a uma dada distância do eixo maior	119
Fig. 3.40 – Elipse partindo do eixo menor	120
Fig. 3.41 – Pontos da elipse por diâmetros conjugados	120
Fig. 3.42 – Direção de diâmetro e ponto	121
Fig. 3.43 – Elipse por feixes projetivos	122
Fig. 3.44 – Tangente à elipse no ponto $P$	122
Fig. 3.45 a) – Tangentes à elipse a partir de um ponto exterior	123
Fig. 3.45 b) – Tangentes à elipse a partir de um ponto exterior	124
Fig. 3.46 – Tangentes paralelas a uma direção	124
Fig. 3.47 – Tangente num ponto	125
Fig. 3.48 – Focos a partir do eixo maior e de um ponto	125
Fig. 3.49 – Parábola ponto a ponto	126
Fig. 3.50 – Parábola por feixes projetivos	127
Fig. 3.51 – Parábola conhecido o parâmetro	128
Fig. 3.52 – Parábola (Teorema de Fermat)	128
Fig. 3.53 – Parábola definida por dois pontos e suas tangente	130
Fig. 3.54 – O foco e pontos da parábola	131
Fig. 3.55 – Foco e pontos da parábola	132
Fig. 3.56 – Eixo e foco da parábola dada graficamente	133
Fig. 3.57 – Parábola por rotação	133
Fig. 3.58 – Construção da parábola por rotação	134
Fig. 3.59 – Parábola por 3 pontos e direção do eixo	135
Fig. 3.60 – Pontos de parábola conhecida outra de vão igual	136
Fig. 3.61 – Parábola dados o eixo e dois pontos	137
Fig. 3.62 – Parábola por dois pontos e tangente no vértice	137
Fig. 3.63 – Parábola por $A$ e $B$ e tangente $t$ no vértice – 2º método	138
Fig. 3.64 a) – Parábola por $A$ e $B$ e tangente $t$ no vértice – 3º método	140
Fig. 3.64 b) – Parábola por $A$ e $B$ e tangente $t$ no vértice – 3º método	141
Fig. 3.64 c) – Propriedade das parábolas descrita por Todd	142
Fig. 3.64 d) – Conjunto de propriedades testadas	142

Fig. 3.65 – Parábola por $A$ e $B$ e tangentes $t_1$ e $t_2$	143
Fig. 3.66 – Foco e vértice de parábola	144
Fig. 3.67 – Assíntotas e focos da hipérbole	146
Fig. 3.68 – Ponto da hipérbole a distância dada do eixo transversal	146
Fig. 3.69 – Ponto da hipérbole definida pelas assíntotas e eixo transversal	147
Fig. 3.70 – Ponto da hipérbole a uma distância qualquer do eixo secundário	148
Fig. 3.71 – Hipérboles com as mesmas assíntotas	149
Fig. 3.72 – Hipérbole conjugada como secção de hiperboloide	150
Fig. 3.73 – Pontos de hipérbole conjugada	151
Fig. 3.74 – Rotação da hipérbole em torno do seu eixo	152
Fig. 3.75 – Hipérbole por feixes projetivos	153
Fig. 3.76 – Hipérbole dadas as assíntotas e $P$ (1º método)	154
Fig. 3.77 – Hipérbole dadas as assíntotas e $P$ (2º Método)	154
Fig. 3.78 – Assíntotas, eixos e focos de hipérbole gráfica	155
Fig. 3.79 – Hipérbole por ponto e assíntotas	156
Fig. 3.80 – Tangentes à hipérbole por ponto exterior	157
Fig. 3.81 – Hipérbole por 2 pontos e 2 tangentes	157
Fig. 3.82 – Hipérbole por 3 pontos e duas tangentes	158
Fig.3.83 – Quadro das cinco condições para definir uma cónica	160
Fig.3.84 – Teorema de Pascal	161
Fig. 3.85 – Determinação da Pascala em <i>hexavértice</i> não convexo	162
Fig.3.86 – Teorema de Pappus	163
Fig.3.87 – Pentavértice e <i>Pascala</i>	163
Fig.3.88 – Quadrivértice e <i>Pascala</i>	163
Fig.3.89 – Trivértice e <i>Pascala</i>	164
Fig.3.90 – Teorema de Brianchon	165
Fig. 3.91 – Pentalátero e Teorema de Brianchon	166
Fig. 3.92 – Quadrilátero e Teorema de Brianchon	167
Fig. 3.93 – Quadrilátero completo	167
Fig. 3.94 – Trilátero e Teorema de Brianchon	168
Fig. 3.95 – Dados 5 pontos determinar outro ponto	169
Fig. 3.96 – Dados 5 pontos determinar a curva graficamente	169
Fig. 3.97 – Dados quatro pontos e a tangente num deles determinar outro ponto	170
Fig. 3.98 – Dados três pontos e as tangentes em dois deles determinar outro ponto	171

Fig. 3.99 – Dados 5 pontos determinar a tangente num deles	171
Fig. 3.100 – Dados 4 pontos e 1 tangente determinar outra tangente	172
Fig. 3.101 – Dados 3 pontos e 2 tangentes determinar tangente	172
Fig. 3.102 – Dados cinco tangentes determinar um ponto de tangência	173
Fig. 3.103 – Dados quatro tangentes e um ponto de tangência determinar outro ponto	174
Fig. 3.104 – Dadas três tangentes e os pontos de tangência em duas delas determinar outro ponto de tangência	175
Fig. 3.105 – Dadas cinco tangentes determinar outra tangente	175
Fig. 3.106 – Dados quatro tangentes e um ponto determinar a tangente	176
Fig. 3.107 – Dados três tangentes e dois pontos de tangência determinar outra tangente	177
Fig. 3.108 a) – Centro a partir de cinco pontos	177
Fig. 3.108 b) – Centro a partir de cinco pontos	178
Fig. 3.109 a) – Centro de elipse	178
Fig. 3.109 b) – Centro de hipérbole	179
Fig. 3.110 – Diâmetros conjugados por cinco condições	179
Fig. 3.111 a) – Intersecção de reta com cónica definida por eixo e focos (1ª etapa)	181
Fig. 3.111 b) – Intersecção de reta com cónica definida por eixo e focos (2ª etapa)	182
Fig. 3.112 – Intersecção de reta com parábola	183
Fig. 3.113 a) – Intersecção de reta com cónica definida por diâmetros conjugados	183
Fig. 3.113 b) – Intersecção de reta com parábola	184
Fig. 3.114 – Intersecção de reta com cónica definida por diâmetro e Ponto	185
Fig. 3.115 – Intersecção de reta com cónica definida por cinco condições	186
Fig.3.116 a) – 3 Tangentes 2 pontos	187
Fig.3.116 b) – 3 Tangentes 2 pontos	187
Fig. 117 a) – 4 tangentes 1 ponto (passo 1)	188
Fig.3.117 b) – 4 Tangentes 1 ponto (passo 2)	188
Fig. 3.118 – 5 Tangentes determinar pontos	189
Fig. 3.119 – Tangente em $P$ dadas 4 tangentes	190
Fig. 3.120 – Curva de segundo grau, curva cónica, obtida por feixes projetivos	192
Fig. 3.121 – Pontos e tangentes por feixes projetivos (1º processo)	193
Fig. 3.122 – Pontos e tangentes por feixes projetivos (2º processo)	195
Fig.3.123 a) – 3 pontos 2 tangentes	197
Fig. 3.123 b) – 3 pontos 2 tangentes	197
Fig. 3.124 – 3 pontos 2 tangentes que não se intersectam no desenho	198

Fig. 3.125 – 3 pontos 2 tangentes paralelas	199
Fig. 3.126 – 4 pontos e tangente num deles	200
Fig. 3.127 – Determinação da cónica por 5 pontos	201
Fig. 3.128 – 2 pontos 2 tangentes e eixo	202
Fig. 3.129 – Tangente num ponto	203
Fig. 3.130 – Tangentes dados 5 pontos (1º método)	203
Fig. 3.131 – Tangentes dados 5 pontos (2º Método)	204
Fig. 3.132 – Tangente à elipse por proporções	205
Fig. 4.1 – Quadro resumo das superfícies	216
Fig. 4.2 – Museu Guggenheim de Bilbao	218
Fig. 4.3 – Superfície cónica oblíqua	219
Fig. 4.4 – Superfície cilíndrica oblíqua	219
Fig. 4.5 – Esfera	219
Fig. 4.6 – Elipsoide de revolução	220
Fig. 4.7 – Elipsoide elíptico	220
Fig. 4.8 – Pontos na superfície do elipsoide	220
Fig. 4.9 – Determinação de secção num elipsoide	
Fig. 4.10 – Cama Nido desenhada por Gunther Thony	221
Fig. 4.11 – Paraboloide de revolução	222
Fig. 4.12 – Paraboloide elíptico	222
Fig. 4.13 – Secção em paraboloide	222
Fig. 4.14 – Parábola secção de paraboloide	222
Fig. 4.15 – Paraboloide hiperbólico	223
Fig. 4.16 – Estrutura de sombreamento e zona de lazer	224
Fig. 4.17 – Estrutura de sombreamento	224
Fig. 4.18 – Cobertura em paraboloides hiperbólicos	225
Fig. 4.19 – Definição de hiperbolóide de revolução por geratrizes retas	226
Fig. 4.20 – Contorno aparente do hiperbolóide e cone assintótico	226
Fig. 4.21 – Definição de hiperboloide elíptico por geratrizes retas	226
Fig. 4.22 – Contorno aparente do hiperboloide e cone assintótico	226
Fig. 4.23 – Projeto Omniflow com estrutura em hiperboloide	227
Fig. 4.24 – Passadiço pedonal em hiperboloide de revolução	228
Fig. 4.25 – Hiperboloide como estrutura adaptável	228
Fig. 4.26 – Hiperboloide de revolução de duas folhas	229

Fig. 4.27 – Hiperboloide elíptico de duas folhas	229
Fig. 4.28 – Toro	231
Fig. 4.29 – Globoide	231
Fig. 4.30 – Capialçado cilíndrico	231
Fig. 4.31 – Cilindroide de plano diretor	232
Fig. 4.32 – Cilindroide de diretrizes cónicas	232
Fig. 4.33 – Conoide reto	232
Fig. 4.34 – Biblioteca da FAUP	232
Fig. 4.35 – Convoluta	233
Fig. 4.36 – Convoluta	233
Fig. 4.37 – Cone empenado	233
Fig. 4.38 – Bocal de secador em convoluta	233
Fig. 4.39 – Corno de vaca	234
Fig. 4.40 – Capialçados	234
Fig. 4.41 – Luneto cilíndrico reto	235
Fig. 4.42 – Luneto cilíndrico oblíquo	235
Fig. 4.43 – Luneto cónico	235
Fig. 4.44 – Luneto esférico	235
Fig. 4.45 – Cúpula bizantina	236
Fig. 4.46 – Superfície com seis paraboloides	236
Fig. 4.47 – Esquema construtivo do toldo para eventos	237
Fig. 4.48 – Estruturas Chelseapost e Pebbleside	237
Fig. 4.49 – Superfície <i>manifold</i>	239
Fig. 4.50 – Superfície Tzitzeica	240
Fig. 4.51 – Ilha de Cristal	240
Fig. 4.52 – Cobertura de passadiços na Fiera Milano	241
Fig. 4.53 – Candeeiro de teto Quin.mgx	241
Fig. 4.54 – Modelação de superfícies	242
Fig. 4.55 – Frankfurt Office	242
Fig. 4.56 – Intersecção de paraboloides e hiperboloide ambos de revolução	246
Fig. 4.57 – Método alternativo a)	247
Fig. 4.59 – Intersecção de cone e paraboloides	248
Fig. 4.60 – Planificação de um cone oblíquo	250
Fig. 4.61 – Centro da elipse como projeção cónica de uma circunferência	251

Fig. 4.62 – Perspetiva cónica de um cilindro	253
Fig. 4.63 – Perspetiva cónica de parábola resultando numa elipse	253
Fig. 4.64 – Axonometria de uma elipse	254
Fig. 4.65 – Exemplo de criação de tipografia	255
Fig. 4.66 a) – Definição do diâmetro	256
Fig. 4.66 b) – Definição de outra tangência	256
Fig. 4.66 c) – Diâmetros conjugados	256
Fig. 4.66 d) – Eixos da elipse	256
Fig. 4.67 – Caixas de plástico em elipse abatida	257
Fig. 4.68 – Assentos e encostos de secção elíptica	257
Fig. 4. 69 – Luminária de parede de metacrilato com luz direta e indireta BAMBOO 4820 – Vibia	258
Fig. 4.70 – Candeeiro de chão LED BAMBOO - Vibia	258
Fig. 4.71 – Candeeiro aplique de alumínio ONO	258
Fig. 4.72 – Luminária “Onda” de Isao Hosoe (LUXIT S.p.A.), no Colorado Convention Center	259
Fig. 4.73 – Modelagem de vestuário em software Modaris	259
Fig. 4.74 – Polarização das microondas da radiação cósmica de fundo	260
Fig. 4.75 – Quadro Resumo	261
Fig. 5.1 – Propriedade de Nagore	268
Fig. 5.2 – Generalização ao retângulo	268
Fig. 5.3 – Perspetiva dos quadriláteros	269
Fig. 5.4 – Cónica por quatro tangentes e ponto incidente	270
Fig. 5.5 – Paralelas às diagonais	271
Fig. 5.6 – Zonas no quadrilátero completo	272
Fig. 5.7 – Determinação da quinta tangente	273
Fig. 5.8 – Determinação dos pontos de tangência	274
Fig. 5.9 – 4 tangentes e ponto não incidente – Segunda solução	275
Fig. 5.10 – Ponto na Zona B	275
Fig. 5.11 – Ponto na Zona C	276
Fig. 5.12 – Ponto na Zona D	276
Fig. 5.13 – Ponto na Zona E	277
Fig. 5.14 – Ponto na Zona F	277
Fig. 5.15 – Ponto na Zona G	278
Fig. 5.16 – Cónicas a passar em A	280
Fig. 5.17 – Centros das cónicas a passar em A e B	280

Fig. 5.17 a) – 1ª Solução	281
Fig. 5.17 b) – 2ª Solução	281
Fig. 5.17 c) – 3ª Solução	282
Fig. 5.17 d) – 4ª Solução	282
Fig. 5.18 – Zonas relativamente ao triângulo	283
Fig. 5.18 a) – 2º Caso	283
Fig. 5.18 b) – 3º Caso	283
Fig. 5.18 c) – 4º Caso	284
Fig. 5.18 d) – 5º Caso	284
Fig. 5.18 e) – 6º Caso	284
Fig. 5.18 f) – 7º Caso	284
Fig. 5.18 g) – 8º Caso	284
Fig. 5.18 h) – 9º Caso	284
Fig. 5.19 – Parábola definida por dois pontos e respetivas tangentes e determinação da direção do eixo	285
Fig. 5.20 – Propriedades da parábola descritas por Akopyan	286
Fig. 5.21 – Duas hipérbolas com uma das assíntotas com a mesma direção	287
Fig. 5.22 – Quadro resumo das cônicas definidas por três tangentes e dois pontos não incidentes	288
Fig. 5.23 – Parábola por três pontos e direção do eixo	290
Fig. 5.24 – Parábola por $A$ , $B$ , $C$ e $t_1$ com $B$ e $C$ a igual distância de $t_1$	292
Fig. 5.25 – 2 parábolas definidas por 3 pontos e uma tangente	292
Fig. 5.26 – Determinação da primeira parábola	293
Fig. 5.27 – Determinação da segunda parábola	293
Fig. 5.28 – Determinação do eixo da parábola e de outros pontos da curva	294
Fig. 5.29 – Parábola por 4 pontos em trapézio isósceles	295
Fig. 5.30 – Propriedade da parábola	296
Fig. 5.31 – Parábola por quatro pontos em trapézio escaleno	297
Fig. 5.32 – Propriedade da parábola enunciada por Richter-Gebert	298
Fig. 5.33 a) – Parábola por 4 pontos em quadrilátero convexo (1ª fase)	298
Fig. 5.33 b) – Parábola por 4 pontos em quadrilátero convexo (2ª fase)	299
Fig. 5.33 c) – Parábola por 4 pontos em quadrilátero convexo (3ª fase)	299
Fig. 5.33 d) – Parábola por 4 pontos em quadrilátero convexo (4ª fase)	300
Fig. 5.33 e) – Parábola por 4 pontos em quadrilátero convexo (5ª fase)	301
Fig. 5.33 f) – Parábola por 4 pontos em quadrilátero convexo (6ª fase)	301



Fig. 5.34 – A terceira hipérbole	302
Fig. 5.35 – Teorema descrito por Richter-Gebert	304
Fig. 5.36 a) – Feixe por paralelogramo	305
Fig. 5.36 b) – Feixe por trapézio	305
Fig. 5.36 c) – Feixe por quadrilátero côncavo	305
Fig. 5.36 d) – Feixe por quadrilátero convexo	305
Fig. 5.37 – Propriedade da parábola que passa nos quatro vértices de um trapézio	306
Fig. 5.38 – Feixes de cónicas a passar por quatro pontos – Quadro resumo	307
Fig. 5.39 – Hipérboles homofocais e localização por radar	308
Fig. 5.40 – Propriedade das elipses e hipérboles confocais	309
Fig. 5.41 – Elipses e hipérboles homofocais	309
Fig. 5.42 – Parábolas confocais	310
Fig. 5.43 – Família de elipses	311
Fig. 5.44 – Projeto de Catedral	311
Fig. 5.45 – Curvas paralelas às elipses	312
Fig. 5.44 – Toro gerado em CAD 3D	312
Fig. 5.45 – Elipse ACBD e curva de P	312
Fig. 5.46 – Curvas Toroidais paralelas à parábola	313
Fig. 5.47 – Curvas Toroidais paralelas à hipérbole	313
Fig. 5.48 – Oval de quatro centros	314
Fig. 5.49 – Oval de doze centros	314
Fig. 5.50 – Cabo com e sem sobrecarga	315
Fig. 5.51 – Parábola (vermelho) e catenária (azul)	315
Fig. 5.52 – Pavilhão Rheinstahl	315
Fig. 5.53 – Logo da ThyssenKrupp	315
Fig. 5.52 – Curvas parabólicas	316
Fig. 5.53 – Anamorfoses de curvas cónicas	317
Fig. 5.54 – Escultura do construtivista russo Naum Gabo	318
Fig. 5.55 – Lamparina de pavio por impressão 3D em cerâmica	319
Fig. 5.56 – Modelo matemático de estudo para a lamparina	319
Fig. 5.57 – Anamorfose em infografia científica	320
Fig. 5.58 – Determinação da quádrlica parabólica	322
Fig. 5.59 – Determinação de quádrlica hiperbólica	322
Fig. 5.60 – Determinação de quádrlica elíptica	323

Fig. 5.61 – Determinação de cúbica	323
Fig. 5.62 – Relação entre quádrlica parabólica e cúbica	324
Fig. 5.63 – Determinação de Quártica	324
Fig. 5.64 – Quártica dinâmica	325
Fig. 5.65 – Modelo construtivo de quádrlica em geometria dinâmica	325
Fig. 6.1 – Jato BELL X – 1	334
Fig. 6.2 – Projeto aeronáutico	334
Fig. 6.3 – Projeto de farmácia <i>cellula</i>	334

## GLOSSÁRIO

**Abcissa** – em geometria cartesiana é a medida no eixo horizontal x que define a distância à origem da projeção ortogonal de um ponto. Ordenada será a distância do ponto à sua projeção ortogonal no eixo x.

**Abcissa da ordenada de um ponto de uma curva cónica** – de acordo com a definição utilizada pelos gregos na antiguidade clássica e também utilizada em geometria projetiva, é a parte do diâmetro conjugado relativamente à corda que passa num ponto da cónica, definindo a ordenada, parte essa entre um extremo do diâmetro e a interseção com a corda. De notar que os diâmetros conjugados não são obrigatoriamente perpendiculares entre si.

**Ápex** – o mesmo que vértice.

**Ápex de uma curva cónica** – o mesmo que vértice da curva cónica.

**Assíntota ou assíntota** – reta que é tangente a uma curva num ponto desta no infinito, por exemplo, as hipérbolas têm duas assíntotas.

**Baricentro de um triângulo** – na física é o centro de gravidade, ou centro de massa, ou centróide do triângulo. Geometricamente corresponde ao ponto de interseção das medianas do triângulo, sendo medianas os segmentos que unem o ponto médio de cada lado ao vértice oposto.

**Base do cone** – é a figura plana, normalmente um círculo, cujos pontos definem, em conjunto com o vértice do cone, os contornos do sólido.

**Bomba** – é o espaço livre, normalmente cilíndrico, que pode existir no interior de uma superfície helicoidal.

**Círculo de gola** – nos hiperboloides de revolução de ramo único é o círculo definido pelos vértices da hipérbole geradora ao rodar em torno do eixo de geração da superfície. Por analogia pode também utilizar-se para designar o círculo que se pode estabelecer com centro no centro de uma hipérbole e diâmetro definido pelos vértices da hipérbole.

**Círculo focal** – nas curvas cónicas centrais é o círculo com centro no centro da curva e que passa nos focos.

**Cone** – é o espaço compreendido entre uma superfície cónica e o plano da diretriz.

**Cone de revolução** – é o cone reto de base circular.

**Cone escaleno ou oblíquo** – é o cone em que o segmento que une o vértice ao centro da base não é perpendicular ao plano da base do cone.

**Cone reto** - é o cone em que o segmento da altura, unindo o vértice ao centro da base, é perpendicular ao plano da base do cone.

**Cónica** – consoante o contexto pode ser uma forma simplificada de designar uma curva cónica mas também pode designar que um objeto tem a forma de cone.

**Cónica central** – curva cónica com centro: a elipse, a circunferência enquanto caso particular da elipse, e a hipérbole.

**Cónicas degeneradas** – são todos os tipos de secções em superfícies cónicas que não são graficamente curvas: um ponto (plano de secção a passar no vértice), uma reta (plano de secção tangente à superfície), duas retas concorrentes (plano de secção a passar no vértice e a cortar a diretriz) ou duas retas paralelas (plano de secção paralelo a todas as geratrizes e vértice impróprio, ou seja, no infinito, tornando-se a superfície cilíndrica).

**Contornos aparentes de visibilidade** – são o conjunto de linhas que delimitam exteriormente uma representação plana de qualquer objeto tridimensional.

**Corda de uma cónica** – é o segmento de reta que une dois pontos da curva cónica.

**Corda de uma curva** – é o segmento de reta que une dois pontos da curva.

**Cúbica** – é uma curva ou superfície de 3º grau (ver ordem ou grau).

**Curva cónica** – é qualquer secção plana que se pode produzir numa superfície cónica. É uma elipse se o plano interseccionar todas as geratrizes, é uma parábola se o plano for paralelo a uma geratriz não passando no vértice e interseccionando a diretriz, e é uma hipérbole se o plano de secção for paralelo a duas geratrizes não passando no vértice e interseccionando a diretriz. Se o plano de secção for paralelo a diretriz circular é uma circunferência. Se o plano de secção passar no vértice dá origem a secções designadas por cónicas degeneradas, isto é, se não interseccionar as geratrizes a secção é um ponto, o próprio vértice, se contiver uma geratriz, e só essa, a secção é uma reta, a própria geratriz, se o plano de secção passar no vértice e interseccionar a diretriz a secção são duas retas geratrizes concorrentes, que se podem tornar duas retas paralelas se o vértice da superfície se situar no infinito definindo-se uma superfície cilíndrica.

**Curva discriminante das cónicas** – é a parábola, por delimitar a transição entre elipses e hipérbolas. Se considerarmos uma parábola, dois pontos dela e respetivas tangentes e a reta com a direção do eixo, que passa no ponto médio da corda entre os dois pontos da parábola, o feixe de cónicas centrais que passa nos mesmos dois pontos e tem as mesmas tangentes é constituído por hipérbolas, que interseccionam a reta direção em pontos situados entre o da interseção com a parábola e o ponto de interseção das tangentes, e por elipses, que interseccionam a mesma reta para o lado contrário relativamente à parábola.

**Curvatura de uma curva num ponto desta** – é a curvatura da circunferência osculante nesse ponto.

**Curvatura da curva**, do ponto *A* ao ponto *B* – será a curvatura média medida em todos os pontos da curva entre os dois, incluindo os próprios pontos limite da curva.

**Curvatura de uma circunferência ou arco de circunferência** – é o inverso do raio, ou seja é  $C=1/r$ . Interessa igualmente, para esta definição, lembrar que uma circunferência é o lugar geométrico dos pontos equidistantes  $r$  de um outro designado por centro, sendo  $r$  o raio.

**Curvatura de uma superfície** – é a definida pelas curvaturas normais num ponto da superfície. As curvaturas normais num ponto são as curvaturas das linhas de intersecção da superfície com planos perpendiculares à superfície passando nesse ponto, e que contêm a normal à superfície nesse ponto. Sendo que a curvatura é zero nas retas e, nas curvas, analiticamente, pode ser orientada como positiva num sentido e negativa no contrário, estamos perante diversos métodos de abordagem sendo o mais usual o dos máximos e dos mínimos, ou seja, definir a curvatura da superfície naquele ponto como o produto das curvaturas máxima e mínima encontradas. As curvaturas máximas e mínimas são designadas por curvaturas principais. Se à mínima corresponder uma reta o valor é zero que multiplicado pelo valor da curvatura máxima dá sempre zero, o que corresponde a uma superfície planificável. Quando o referido produto é diferente de 0 a superfície é de dupla curvatura, e logo não planificável, podendo ser positiva quando a máxima e mínima são do mesmo sinal, ou seja no mesmo sentido, ou negativa quando de sinais diferentes, ou quando as direções de curvatura forem opostas.

**Degenerada** – é a curva cónica que, em circunstâncias particulares assume as propriedades geométricas do ponto ou retas ou segmentos de reta.

**Diâmetro conjugado (de outro diâmetro da cónica)** – é o diâmetro paralelo às tangentes nos extremos do outro diâmetro e que bissecta todas as cordas paralelas a este. Dizem-se conjugados dois diâmetros da elipse quando as tangentes à curva nas extremidades de um deles são paralelas ao outro. Um exemplo seriam os eixos da elipse resultante da representação de uma circunferência em axonometria. Mantêm a propriedade de passar no centro da elipse, e, portanto, determinarem-se mutuamente o meio das respectivas longitudes. Na hipérbole um dos diâmetros conjugados fica apenas definido pela direção paralela às tangentes nos extremos do outro diâmetro. Na parábola um diâmetro é conjugado da direção de cordas paralelas, passando nos seus pontos médios e sendo paralelo ao eixo da parábola.

**Diâmetro de uma cónica** – qualquer corda que bissecta uma sequência de cordas paralelas e que passa no centro da cónica.

**Diâmetro transverso** – (o mesmo que eixo transverso) usualmente é definido como segmento de reta que define a distância entre os vértices da hipérbole, embora possa igualmente designar o eixo maior da elipse. Encontra-se por vezes também utilizado como a reta que contém o eixo transverso da hipérbole ou o eixo maior da elipse.

**Diretriz** – é a linha sobre a qual se apoia a geratriz para a definição da superfície. Numa superfície cónica é usualmente utilizada uma circunferência.

**Diretriz de uma cónica** – é a reta que é perpendicular ao eixo a uma distância dos focos determinada, designada por parâmetro, e que permite, em conjugação com os focos, definir a cónica.

**Distância focal** – na elipse e na hipérbole é a distância entre os dois focos, na parábola é a distância do foco à diretriz.

**Dualidade** – é um princípio enunciado por Poncelet que significa que, em geometria plana, dois teoremas são duais quando se mantêm válidos quando permutamos as palavras pontos por retas e retas por pontos. Baseado nos conceitos de pólo e polar, associados ao estudo das cónicas, foi posteriormente generalizado a diferentes teoremas da geometria. No espaço, aplica-se a todas as propriedades de posição a que correspondem outras

segundas propriedades que se obtém substituindo no enunciado da primeira as palavras pontos por planos e planos por pontos.

**Eixo** – reta que em geometria plana corta uma figura em duas metades simétricas relativamente a esse eixo. As figuras planas podem ter um ou dois eixos. Na parábola, por exemplo, só existe um eixo. Também em relação às outras curvas cónicas, a elipse e a hipérbole, pode-se utilizar a designação de eixo, em vez de eixo maior ou eixo transversal. Em geometria tridimensional o eixo é uma reta em torno da qual se pode girar  $360^\circ$  uma qualquer linha geratriz de uma superfície, do mesmo plano ou não. Se a geratriz for do mesmo plano dá origem a uma superfície de revolução.

**Eixo maior e menor de uma elipse** – são diâmetros conjugados perpendiculares entre si no ponto médio de cada um deles, e que definem a maior e menor cordas da curva. Também são por vezes utilizadas estas designações numa hipérbole por associação desta com a elipse de igual “figura”, cujo eixo maior coincide com o eixo transversal de hipérbole e é a largura de um retângulo, e cujo eixo menor da elipse define a altura do retângulo, sendo que as retas que contêm as diagonais do retângulo são as assíntotas da hipérbole.

**Eixo transversal** – (o mesmo que diâmetro transversal) usualmente é definido como segmento de reta que define a distância entre os vértices da hipérbole, embora possa igualmente designar o eixo maior da elipse. Encontra-se por vezes também utilizado como a reta que contém o eixo transversal da hipérbole ou o eixo maior da elipse.

**Eixos conjugados da elipse** – considerando a elipse uma transformação homológica de uma circunferência, em que se representem dois diâmetros perpendiculares entre si, e, por exemplo, se a transformação resultar numa representação em perspetiva cónica com dois pontos de fuga correspondentes às direções dos dois eixos, os eixos representados na elipse serão conjugados não passando no centro da elipse.

**Elipse** – é a secção cónica produzida por um plano oblíquo a todas as geratrizes e que não passa no vértice.

**Figura** – para os geómetras gregos designava o retângulo circunscrito a qualquer figura plana e que permitia, pelos processos de quadratura, calcular as áreas das próprias figuras planas. Relativamente às curvas cónicas trata-se do retângulo de lados paralelos aos eixos da elipse e tangentes a esta, e do retângulo de lados paralelos aos eixos da hipérbole e cujos vértices resultam da interseção das tangentes nos extremos do eixo transversal com as assíntotas, ou do retângulo em que o lado maior é uma corda da parábola paralela à tangente no vértice da parábola e cujos lados menores são definidos pelas perpendiculares nos extremos da corda.

**Figura (de uma cónica central)** – designação que os gregos atribuíam ao retângulo que tem por base o diâmetro transversal e como outro lado o parâmetro ou *latus rectum*.

**Figura plana** – é qualquer linha curva ou quebrada, ou curva e quebrada, cujos pontos se situam num único plano, embora esta expressão seja mais usualmente utilizada para designar unicamente figuras fechadas.

**Figuras semelhantes** – são duas ou mais figuras com propriedades geométricas iguais mas que variam de tamanho e orientação espacial. Se tiverem a mesma orientação espacial diz-se que são figuras semelhantes e de lados paralelos.

**Focos de uma cónica** – são pontos do eixo da cónica que são utilizados desde os gregos da antiguidade clássica como uma das formas para definir as curvas cónicas. Na elipse a soma das distâncias de qualquer dos seus pontos aos focos é igual ao eixo maior. Na hipérbole a diferença das distâncias de qualquer dos seus pontos aos focos é igual ao eixo transversal e na parábola a distância de qualquer ponto ao foco é igual à distância do ponto à diretriz. Com nome originado pelas propriedades óticas designadamente nos espelhos curvos, é um ponto do eixo que dispõe da propriedade de, nos espelhos parabólicos, ser o ponto de interseção

dos raios refletidos pelo espelho resultantes de raios incidentes paralelos ao eixo. Nos espelhos elípticos os raios de luz emitidos a partir de um dos focos, depois de refletidos no espelho, interseitam-se no outro foco. Nos espelhos hiperbólicos os raios luminosos emitidos cuja reta que contem o sentido do raio passe num foco são refletidos no espelho com uma direção que contem o outro foco no prolongamento de sentido contrário ao do raio refletido. Estas propriedades da Ótica são igualmente verificadas em outras áreas da Física, designadamente na Mecânica, e comprováveis por exemplo através de mesas de bilhar com a forma de curvas cónicas. Em Astronomia o foco é a posição de um corpo celeste relativamente à órbita elíptica descrita por um seu satélite.

**Geratriz** – é a linha que ao deslocar-se sobre pontos da diretriz gera a superfície. Se a geratriz for reta a superfície diz-se regrada.

**Grau** – o mesmo que ordem

**Hipérbole** – é a secção cónica produzida por um plano paralelo a duas geratrizes, não as contendo e interseitando a diretriz da superfície.

**Hipérboles conjugadas** – são as que têm as mesmas assíntotas e a mesma distância focal, situando-se os seus ramos em quadrantes simétricos relativamente às assíntotas.

**Latus rectum** (ou parâmetro das ordenadas) – é o segmento de reta que tem um extremo no ponto de interseção de um diâmetro com a curva cónica, perpendicular ao diâmetro e pertencente ao plano da secção, com dimensão constante. Sendo  $p$  o latus rectum ou parâmetro,  $o$  a ordenada e  $a$  a abcissa,  $d$  o diâmetro e  $k$  um acréscimo ou subtração ao parâmetro, na parábola obtemos  $p = o^2 / a$ , na hipérbole obtemos  $p + k = o^2 / (d + a)$  para  $d / p = (d + a) / (p + k)$ , e na elipse obtemos  $p - k = o^2 / a$  para  $d / p = (d - a) / (p - k)$ . De notar que a definição referida é a correspondente a considerar a cónica apresentada pelos eixos, se esta se apresentar por dois diâmetros conjugados o parâmetro é um segmento de grandeza constante para cada cónica, a passar num extremo de um diâmetro e paralelo à direção do diâmetro conjugado.

**Locus** ou **Lugar Geométrico** – é o conjunto de pontos que satisfazem uma condição determinada.

**Normal** ou **perpendicular num ponto (de uma reta, curva, plano ou superfície curva)** – é a reta perpendicular a uma reta, à tangente a uma curva, nesse ponto, a perpendicular a um plano nesse ponto, ou seja, a perpendicular a duas retas não paralelas do plano e a perpendicular a uma superfície curva nesse ponto, ou seja, a perpendicular ao plano tangente à superfície nesse ponto.

**Ordem ou grau de uma superfície** – é o número máximo de pontos em que ela pode ser cortada por uma reta. A ordem de uma superfície é igual à ordem mais elevada das suas secções planas. **Quádrlica** é uma superfície do segundo grau. **Cúbica** é uma superfície do terceiro grau. **Quártica** é uma superfície do quarto grau.

**Ordenada de um ponto da cónica** – é a metade da corda que passa num ponto da cónica entre este e o diâmetro conjugado da direção da corda.

**Parábola** – é a secção cónica produzida por um plano paralelo a uma única geratriz, não a contendo e interseitando a diretriz da superfície.

**Parâmetro das ordenadas** – é mesmo que latus rectum.

**Parâmetro de uma cónica** – designado pelas letras  $p$  ou  $k$ , é a distância de um foco à diretriz situada do mesmo lado do eixo nas cónicas centrais. Na parábola é a distância do foco à diretriz, ou seja, o dobro da distância do foco ao vértice.

**Plano diretor** – plano relativamente ao qual a geratriz, curva plana ou reta, no movimento de geração da superfície, se mantém paralela.

**Pólo e polar relativamente a uma cónica** – O ponto P, interior ou exterior à cónica, é o Pólo sendo p a polar de P em relação à cónica. A polar é a definida pelos pontos conjugados harmónicos com P, nas retas que a partir de P interseitam a cónica, relativamente aos pontos de interseção com a cónica.

**Ponto de contacto** – é o ponto em que uma tangente toca uma curva.

**Quádrlica** – é o grau de uma curva ou superfície de 2º grau (ver ordem ou grau).

**Quadrilátero completo** – figura geométrica definida por qualquer conjunto de quatro retas complanares, em que não existe interseção simultânea de quaisquer três das retas. A figura demarca no plano um quadrilátero e dois triângulos adjacentes e tem três diagonais, duas do quadrilátero e uma terceira definida pelos vértices dos dois triângulos opostos à adjacência.

**Quártica** – é o grau de uma curva ou superfície de 4º grau (ver ordem ou grau).

**Quíntica** – é o grau de uma curva ou superfície de 5º grau (ver ordem ou grau).

**Secção cónica** – intersecção de um plano com um cone ou superfície cónica. Se for paralela à base ou diretriz circular é uma circunferência.

**Secções subcontrárias** – são secções num cone produzidas por planos perpendiculares a um plano perpendicular à base e contendo o eixo do cone, que produz no cone um triângulo semelhante aos triângulos definidos pela intersecção dos dois planos de secção com o mesmo triângulo. Nas condições descritas há duas séries de secções no cone, cada uma produzida por planos paralelos aos das duas secções subcontrárias uma da outra. Como caso particular, se um plano de secção é paralelo à base circular de um cone a secção e a sua subcontrária são circunferências assim como todas as secções paralelas a estas.

**Superfície cónica** – é a superfície gerada por uma reta designada geratriz, considerando que a reta se desloca fixa num ponto próprio ou impróprio, ou seja situado no infinito, tendo como diretriz qualquer das curvas cónicas não degeneradas, embora usualmente seja apresentada com diretriz circular. Aprofundando a definição, é a superfície definida por retas, designadas por geratrizes, passando por um ponto não pertencente ao plano da diretriz, próprio ou impróprio, ou seja, situado no infinito, designado vértice ou **ápex**, e que passam igualmente por pontos da diretriz, que é, em regra, uma circunferência, embora possa ser qualquer curva cónica. A superfície define um duplo cone, ou seja, dois cones semelhantes com direções opostas relativamente ao vértice. Se o vértice estiver no infinito a superfície torna-se cilíndrica, com geratrizes paralelas. Tendo em conta que a elipse, e o seu caso particular o círculo, podem ser considerados polígonos com um número infinito de lados, nessa perspetiva também são superfícies cónicas as superfícies prismáticas e piramidais. Por outro lado, se a curva diretriz degenerar numa reta a superfície é um plano.

**Superfície curva** – é a superfície em que existem curvas planas. As superfícies curvas podem ser de curvatura simples relativamente a um dos seus pontos, se existir um plano de secção a passar no ponto que nesta dê origem a uma reta, ou de curvatura dupla, se quaisquer dois planos de secção a passar no pontos derem origem a curvas.

**Superfície de revolução** – é a que resulta da rotação de uma geratriz reta ou curva em torno de um eixo. Podem ser geradas por retas ou curvas complanares com o eixo de revolução, situação mais vulgar, ou as geratrizes podem ser retas ou curvas não complanares com o eixo.



**Superfície empenada** – é a superfície regradada que não pode se planificar.

**Superfície planificável** – é a superfície regradada que pode desenvolver-se num plano.

**Superfície regradada** – é a que é gerada por uma reta.

**Tangente a uma curva num ponto T** – é a posição limite de uma secante que gira em roda do ponto até que o seu segundo ponto de intersecção com a curva se confunda com T. Se T é impróprio, ou seja, está no infinito a tangente chama-se assíntota.

**Tangente a uma cónica** – é a tangente à curva num ponto dado, pertencendo ao plano da curva, é perpendicular à normal, que é a bissetriz do ângulo formado pelos segmentos de reta que, nas cónicas centrais, unem o ponto dado aos dois focos, sendo na parábola o ângulo definido pelo segmento de reta que une o ponto ao foco e pela reta que passa no ponto paralela ao eixo da parábola.

**Tangente a uma curva** – é a reta que toca a curva num único ponto.

**Triângulo axial de um cone** – é a secção produzida num cone por um plano que contenha o eixo.

**Tronco de superfície ou sólido** – é uma das partes resultantes da intersecção da superfície ou sólido com outra superfície.

**Vértice** – nas figuras planas é um ponto em cada extremo dos segmentos de reta que definem a figura. Nos sólidos são pontos de intersecção de arestas ou de confluência de geratrizes. Quando os vértices são intersecções de arestas da base são vértices da base.

**Vértice da base de um sólido** – é cada ponto no extremo dos segmentos de reta que definem a base do sólido.

**Vértice de um cone ou superfície cónica** – é um ponto por onde passam todas as geratrizes que definem a superfície cónica

**Vértice de uma curva** – é o ponto sobre o eixo de uma curva, ou parte de curva, na inflexão desta no ponto de maior curvatura, e que permite dividir essa curva ou parte de curva em dois ramos.

**Vértice de uma curva cónica** – são os pontos da curva no eixo desta e que têm como tangentes paralelas à diretriz. Na elipse são os pontos extremos do eixo maior e na hipérbole os pontos extremos do eixo transversal. Na parábola é o ponto da curva no eixo. Nos cones retos alguns autores consideram apenas um vértice, o ponto da curva de secção a maior distância à base do cone.

## **NOTAÇÕES ADOTADAS E REPRESENTAÇÃO**

Ao longo do texto são utilizadas nas figuras traçados de geometria plana e a representação de formas tridimensionais.

Assim, quanto aos traçados de geometria plana, designam-se os pontos por letras maiúsculas do alfabeto latino e as linhas por letras minúsculas do mesmo alfabeto, tal como tem sido habitual no ensino português de matemática e geometria descritiva.

Quanto às formas tridimensionais utiliza-se a representação em dupla projecção ortogonal, no método europeu, ou seja, projecção horizontal positiva abaixo do eixo x e frontal positiva acima do eixo x. O sistema de



notações utilizado é o adotado desde 1999-2000 no ensino secundário português de Geometria Descritiva, partindo do princípio que a maioria dos utilizadores deste texto já será detentora de conhecimentos anteriores na área da Geometria Descritiva e conhecerá tal sistema de notações. Deve, no entanto, salientar-se que na história do ensino da Geometria Descritiva no ensino secundário português encontramos sistemas de notações com algumas diferenças de época para época, e que, sobretudo, no ensino superior e na bibliografia de outros países, há diferentes sistemas de notações.

## Sistema de referência

- plano horizontal de projeção  $\nu_0$ .
- plano frontal de projeção  $\varphi_0$ .
- plano de perfil de referência  $\pi_0$ .
- reta de intersecção de  $\varphi_0$  e  $\nu_0$ , eixo  $X$ .
- reta de intersecção de  $\nu_0$  e  $\pi_0$ , eixo  $Y$ .
- reta de intersecção de  $\varphi_0$  e  $\pi_0$ , eixo  $Z$ .

## Coordenadas

- **abcissa** – distância ao plano  $\pi_0$ . É positiva para a esquerda.
- **afastamento** – distância ao plano  $\varphi_0$ . É positivo para a frente.
- **cota** – distância ao plano  $\nu_0$ . É positiva para cima.

## Notações

**Pontos** – (alfabeto latino maiúsculo em estilo itálico) –  $A, B, \dots P, Q, \dots$

$A_0$  – projeção de  $A$  no eixo  $x$ .

$A_1$  – projeção horizontal do ponto  $A$ .

$A_2$  – projeção frontal do ponto  $A$ .

$A_3$  – projeção de  $A$  no plano de perfil  $\pi_0$ .

$A_r$  – rebatimento do ponto  $A$ .

**Retas e linhas em geral** – (alfabeto latino min. em estilo itálico) –  $a, b, \dots r, \dots$

$r_1$  – projeção horizontal da reta ou linha  $r$ .

$r_2$  – projeção frontal da reta ou linha  $r$ .

$r_3$  – projeção de  $r$  no plano de perfil  $\pi_0$ .

$r_r$  – rebatimento da reta ou linha  $r$ .

$H_r$  – traço horizontal da reta  $r$ . Intersecção de  $r$  com  $V_0$ .

$F_r$  – traço frontal da reta  $r$ . Intersecção de  $r$  com  $\varphi_0$ .

$(r_2)$  – reta projetante frontal.

$(r_1)$  – reta projetante horizontal.

$[d_1]$  – linha  $d$  curva, ou poliédrica, fechada, em projeção horizontal.

$[d_2]$  – linha  $d$  curva, ou poliédrica, fechada, em projeção frontal.

$[d_3]$  – linha  $d$  curva, ou poliédrica, fechada, em projeção lateral

**Planos** – (alfabeto grego minúsculo em estilo itálico)

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, \omicron, \pi, \rho, \varsigma, \sigma, \tau, \upsilon, \varphi, \chi, \psi, \varepsilon, \omega$ .

$\theta_0$  – traço do plano  $\theta$  no eixo  $x$ . Intersecção do plano  $\theta$  com o eixo  $x$ .

$h_\theta$  – traço horizontal do plano  $\theta$ . Intersecção do plano  $\theta$  com o

$f_\theta$  – traço frontal do plano  $\theta$ . Intersecção do plano  $\theta$  com o

$p_\theta$  – traço de perfil do plano  $\theta$ . Intersecção do plano  $\theta$  com o

$(f_\delta)$  – plano projetante frontal.

$(h_\delta)$  – plano projetante horizontal.

**Sólidos ou Superfícies** – (alfabeto grego maiúsculo em estilo itálico) –

$A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta, I, K, \Lambda, M, N, \Xi, O, \Pi, P, \Sigma, T, Y, \Phi, X, \Psi, \Omega$ .

**Linha fechada** curva ou poligonal – (linha entre parêntesis retos) –  $[s]$  ou  $[ABCDE]$ .

**Intersecção de dois planos** – reta  $i = \alpha \cap \beta$ .

**Intersecção de uma reta com um plano** – ponto  $P = r \cap \delta$ .

**Coincidências de pontos, retas, linhas, superfícies ou suas projeções**

$$A \equiv A_2 \equiv (r_2) \equiv F_2 r$$

$$r_2 \equiv (f_\theta)$$

$$[d_2] \equiv (\phi)$$

### Tipos de linhas

Dada a natureza dos temas abordados procurar-se-á cumprir com as normas de desenho técnico, não obstante, por razões comunicativas, sejam necessárias algumas adaptações adequadas. Assim, se em desenho técnico, linhas de igual relevância têm espessuras iguais, na resolução de problemas geométricos parece

aceitável que a solução seja apresentada com uma espessura maior, que em desenho técnico corresponde à delimitação dos cortes operados num material. Da mesma forma, se no desenho técnico as linhas traço ponto traço são auxiliares que designam posições de eixos ou cortes, serão aqui utilizadas também como indicação de planos auxiliares. As designações fino, médio e espesso têm correspondência no desenho técnico em normas próprias relacionadas com a dimensão dos desenhos e que, grosso modo, significam aproximadamente a duplicação da espessura fina para a espessura média e, novamente a sua duplicação para a espessura maior, tendo em conta a dimensão total do desenho.

Linhas auxiliares – traço contínuo fino.

Contornos visíveis ou dados – traço contínuo de espessura média.

Contornos invisíveis – traço interrompido de espessura média.

Linhas de apresentação de soluções – traço de espessura maior, contínuo ou interrompido.

Planos auxiliares e linhas de eixo – traço ponto traço de espessura fina.

